

# Número Envoltório na Convexidade $P_3$ : Resultados e Aplicações

Julliano R. Nascimento

Deller J. Ferreira

Erika M. M. Coelho

Instituto de Informática – Universidade Federal de Goiás (UFG)

Caixa Postal 131 – 74001-970 – Goiânia – GO – Brasil

{jullianorn, deller, erikamorais}@inf.ufg.br

## ABSTRACT

This paper presents a systematic review of the literature on the results and applications of the hull number in  $P_3$ -convexity in graphs. The determination of such parameter is equivalent to the problem of finding the minimum number of vertices of a graph that allows disseminating information to all the vertices of the graph. In particular, this review describes a panorama of theoretical and applied studies concerning the hull number in  $P_3$ -convexity in graphs regarding the modeling of social phenomena. The results show that the parameter is barely applied in computational sociology for modeling social phenomena. On the other hand, with the emergence of social networks, theoretical research has been boosted in recent decades. Many researchers have directed efforts to find new polynomial time algorithms, with the aim of contributing to the solution of problems related to social influence and information spread. However, there is still a room for studies involving the hull number in  $P_3$ -convexity.

## RESUMO

Este artigo apresenta uma revisão sistemática da literatura sobre os resultados e aplicações do número envoltório na convexidade  $P_3$  em grafos. A determinação deste parâmetro é equivalente ao problema de se encontrar o menor número de vértices de um grafo que permitam disseminar uma informação, influência, ou contaminação, para todos os vértices do grafo. Em particular, esta revisão descreve um panorama sobre estudos teóricos e aplicados acerca do número envoltório  $P_3$  considerando a modelagem de fenômenos sociais. Os resultados mostram que o parâmetro é pouco explorado em sociologia computacional para a modelagem de fenômenos sociais. Por outro lado, com o surgimento das redes sociais, pesquisas teóricas têm sido impulsionadas nas últimas décadas. Pesquisadores têm direcionado esforços com o objetivo de contribuir para a solução de problemas relacionados à influência social e disseminação de informação. Entretanto, ainda há espaço para estudos envolvendo o número envoltório na convexidade  $P_3$ .

## CCS Concepts

- Mathematics of computing → Combinatoric problems
- Mathematics of computing → Graph Theory.

## Keywords

Número envoltório  $P_3$ , convexidade  $P_3$ , revisão sistemática.

## 1. INTRODUÇÃO

Espaços de convexidade formam um tópico clássico, em vários

Permission to make digital or hard copies of all or part of this work for personal or classroom use is granted without fee provided that copies are not made or distributed for profit or commercial advantage and that copies bear this notice and the full citation on the first page. To copy otherwise, or republish, to post on servers or to redistribute to lists, requires prior specific permission and/or a fee.

ramos da matemática, tendo obtido impulso na virada do século XX. O estudo de convexidades aplicadas a grafos é mais recente, tendo suas primeiras discussões na década de 1970 [15]. Com os conceitos de convexidade em grafos, pode-se modelar, e eventualmente resolver, problemas em contextos que envolvem processos de disseminação de uma informação ou influência entre entidades.

Dentre os modelos de disseminação de uma propriedade dentro de uma rede, podemos considerar um grafo  $G$ , um conjunto  $U$  de vértices de  $G$  que inicialmente possuem a propriedade, e um processo iterativo por meio do qual novos vértices  $u$  entram no conjunto  $U$  sempre que dois vizinhos de  $u$  já estejam em  $U$ . Este modelo é conhecido como *convexidade  $P_3$*  e um exemplo clássico que pode ser abordado é o problema da contaminação.

O problema da contaminação endereçado por Balogh e Pete [10] e Bollobás [14], também conhecido como problema do espalhamento de doença em uma grade quadrada, consiste em um tabuleiro de xadrez  $n \times n$ , ou grade quadrada  $n \times n$ , onde algumas células estão inicialmente infectadas. Iterativamente, uma célula  $s$  se torna infectada se pelo menos duas de suas vizinhas estão contaminadas. O cerne do problema está em descobrir qual é o número mínimo de células originalmente contaminadas necessárias para garantir que todas as células da grade se tornem eventualmente infectadas.

O problema de se encontrar o número mínimo de células, ou vértices, que inicialmente contaminadas propagam a contaminação para todos os vértices de um grafo  $G$  é um tópico relevante pelo fato de seu estudo poder nortear pesquisas acerca de técnicas de prevenção de contaminação.

O conceito de número envoltório na área de convexidade em grafos foi introduzido em 1985, por Everett e Seidman [44]. Com o surgimento das redes sociais e a popularização da Internet, a partir do segundo milênio, houve o impulso em pesquisas teóricas concernentes ao número envoltório  $P_3$ .

Nos contextos de redes sociais e influência social, alguns exemplos de aplicações do conceito de número envoltório podem ser encontrados em vários contextos diferentes [29, 31, 50, 64]. Em um destes exemplos, endereçado por Santos [64], é considerada a situação em que uma pessoa é convencida a fazer parte de um grupo, ou visitar um *website*, sempre que pelo menos  $k$  de seus amigos também fizerem parte deste grupo ou visitaram um *website*. O caso em que  $k = 2$  é modelado fielmente na convexidade  $P_3$ . Chama-se de convertidos aqueles indivíduos que fazem parte do grupo. Estes podem ter sido adicionados ao grupo em um momento inicial, após alguma campanha publicitária, por exemplo, ou podem ter entrado após constatarem a presença de amigos no grupo. Neste âmbito, o número envoltório equivale ao problema de encontrar a menor quantidade de pessoas que devem

ser convencidas inicialmente a fazer parte do grupo de forma que, uma vez que tempo suficiente tenha transcorrido, todos os membros da rede social sejam convertidos.

A convexidade  $P_3$  também é relevante no contexto de estratégias de *marketing* [25, 50, 34]. Suponha que uma empresa necessite vender um determinado produto, e que dois amigos consigam convencer um terceiro a comprá-lo. Considerando as relações de amizade entre cidadãos de um determinado local, modeladas como um grafo, e aplicando o conceito de número envoltório  $P_3$ , pode ser possível determinar o número mínimo de indivíduos que a empresa deva inicialmente convencer para convencer todos os cidadãos da região a comprar o seu produto.

Diretamente relacionados aos contextos de influência social discutidos acima, a partir dos anos 90, alguns sociólogos começaram a usar técnicas computacionais para simular e analisar implicações de agentes de interação em dadas estruturas sociais, dando origem à um novo campo de pesquisa denominado sociologia computacional [8, 42, 43]. Um dos campos desta área que se relaciona com os conceitos de convexidade, é a sociologia computacional baseada em agentes, que, segundo Squazzoni [67], é o estudo de padrões sociais através de modelos computacionais de interação social entre agentes heterogêneos incorporados em dadas estruturas sociais, por exemplo, redes sociais, vizinhança espacial e estruturas institucionais.

Deste modo, apesar das particularidades de cada área e das diferentes nomenclaturas, como conversão irreversível, *dynamic monopolies*, *bootstrap percolation* e *threshold processes*, os estudos de convexidade em grafos atraíram a atenção de vários pesquisadores, sendo alvo de estudos e aplicações além dos cenários de contaminação, redes sociais e estratégias de *marketing*, também nos contextos de divulgação de opinião [38, 50], redes de expressão gênica [49], *cellular automata* [4, 49], *percolation* [9] e computação distribuída [45, 47, 56]. Apesar da importância, há uma carência de revisões sistemáticas e *surveys* nesta área de pesquisa envolvendo aplicações do número envoltório, estudos estes que poderiam mostrar o alcance dos resultados que já foram obtidos com o propósito de evidenciar problemas em aberto e lacunas na literatura.

Frequentemente, a área de Teoria dos Grafos se depara com questões de pesquisa que consistem em identificar a complexidade de solução de problemas. Em particular, para uma dada classe de grafos, determinar se existe um algoritmo eficiente que resolva um dado um problema, que no caso desta revisão é a determinação do parâmetro número envoltório  $P_3$ . Entende-se por algoritmo eficiente um algoritmo que possui complexidade de tempo polinomial no tamanho da entrada, isto é, da ordem  $O(n^k)$  para uma constante  $k$  e uma instância de entrada de tamanho  $n$ .

Assim sendo, esta revisão tem por objetivo identificar quais classes de grafos ainda não possuem o número envoltório  $P_3$  determinado, a fim de que possam ser provados resultados algorítmicos e de complexidade para as classes identificadas. Além disso, esta revisão contribui para suprir a inexistência de revisões sistemáticas envolvendo a convexidade  $P_3$  em grafos, no sentido de evidenciar pesquisas nas quais os conceitos de número envoltório na convexidade  $P_3$  são aplicados. Para que, a partir das análises aqui realizadas, seja provido um entendimento sobre as práticas correntes e descobertas na área de sociologia computacional relacionadas ao parâmetro número envoltório  $P_3$ .

Como resultados mostra-se que o número envoltório na convexidade  $P_3$  é um parâmetro que não possui aplicações

práticas diretas em sociologia computacional, mas é bastante investigado em aspectos teóricos, nos quais podem servir de fundamentos para pesquisas futuras. Em contrapartida, também mostra-se que problemas correlatos, como conversão irreversível, contém aplicações práticas reais, com estudos empíricos inclusive em redes sociais como Facebook, Flickr, Twitter e YouTube.

Este artigo está organizado na seguinte estrutura. Na Seção 2 são definidos os conceitos fundamentais de convexidade em grafos e na Seção 3 é apresentado o método de revisão sistemática bem como o planejamento da mesma. Os resultados e a discussão se encontram na Seção 4, respectivamente, e a conclusão segue na Seção 5.

## 2. CONVEXIDADE EM GRAFOS

A convexidade em grafos surgiu como uma extensão da convexidade no espaço Euclidiano, na qual um conjunto é convexo se o segmento de reta entre cada par de pontos do conjunto está contido no conjunto. Nesta seção são definidos formalmente os conceitos de convexidade em grafos a serem utilizados, baseados em van de Vel [68].

Dado um grafo simples e finito  $G = (V, E)$ , uma família  $\mathcal{C}$  de subconjuntos de  $V(G)$  é uma *convexidade* sobre  $V(G)$  se  $\emptyset, V(G) \in \mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}$  é fechada sobre interseções.

Os elementos de  $\mathcal{C}$  são chamados *conjuntos convexos*. O *fecho convexo* de algum conjunto  $S$ , com relação à alguma convexidade  $\mathcal{C}$ , é o menor conjunto convexo  $H_{\mathcal{C}}(S) \in \mathcal{C}$  contendo  $S$ . Se  $H_{\mathcal{C}}(S) = V(G)$ , então  $S$  é chamado *conjunto envoltório* de  $G$ . A cardinalidade  $h_{\mathcal{C}}(G)$  do menor conjunto envoltório de  $G$  é o *número envoltório* de  $G$ .

As convexidades em grafos mais comuns são definidas através de um conjunto  $\mathcal{P}$  de caminhos. Neste caso, um subconjunto  $C \in V(G)$  é *convexo* precisamente quando  $C$  contém todos os vértices pertencentes aos caminhos de  $\mathcal{P}$  cujos vértices extremos estão também em  $C$ . Quando  $\mathcal{P}$  é o conjunto de todos os caminhos mínimos em  $G$  então  $\mathcal{C}$  é a *convexidade geodética*, [35, 44]. Quando  $\mathcal{P}$  é a coleção de todos os caminhos induzidos de  $G$ , então  $\mathcal{C}$  é a *convexidade monofônica*, [37, 41]. Quando  $\mathcal{P}$  é o conjunto de todos os caminhos de comprimento dois entre dois vértices, então  $\mathcal{C}$  é a *convexidade  $P_3$* , ou *convexidade de caminhos de ordem três* [17, 40, 60].

Encerrados os conceitos relativos à convexidade em grafos, prossegue-se com o método de revisão.

## 3. MÉTODO DE REVISÃO

Uma revisão sistemática da literatura é um meio de identificar, avaliar e interpretar todas as pesquisas disponíveis relevantes para uma determinada questão de pesquisa ou área temática, ou fenômeno de interesse [53]. Esta revisão sistemática da literatura segue as diretrizes propostas por Kitchenham e Charters [53], as quais estruturam os estágios envolvidos em três fases: planejamento, condução e relato. Baseadas nestas diretrizes, esta seção contém o planejamento da revisão sistemática, detalhando a necessidade da revisão, a questão de pesquisa e o protocolo de revisão. Ainda nesta seção se encontra a fase de condução, em que mostra particularidades sobre a execução da busca e a divisão dos estágios com a quantidade de estudos encontrados em cada estágio.

### 3.1 Necessidade da Revisão e Questões de Pesquisa

Esta revisão objetiva abordar as pesquisas aplicadas correlatas ao número envoltório na convexidade  $P_3$ , uma vez que há a ausência de revisões sistemáticas e *surveys* que tratam deste assunto, e também identificar as classes de grafos em que este parâmetro ainda não foi determinado, para que possam ser provados resultados algorítmicos e de complexidade para as classes identificadas. Desta forma as questões de pesquisa são:

- Questão de Pesquisa 1. Qual o alcance e limitações das aplicações existentes sobre o número envoltório na convexidade  $P_3$ ?
- Questão de Pesquisa 2. Quais as lacunas concernentes aos resultados teóricos existentes sobre o número envoltório na convexidade  $P_3$ ?

### 3.2 Protocolo da Revisão

Para o propósito desta revisão sistemática são considerados estudos redigidos em inglês e português, que se encontram disponíveis gratuitamente nas bases de busca Google Scholar, Science Direct, SpringerLink e Scopus. Para o gerenciamento dos estudos encontrados através das buscas é utilizado o *software* StArt, State of the Art through Systematic Review [69]. Com a finalidade de prover uma abrangência maior à seleção de dados, não se restringiu a busca a períodos de tempo específicos, nem ao tipo do estudo, sendo considerados artigos, dissertações de mestrado e teses de doutorado. Pela natureza destes tipos de trabalhos, mesmo escritos em português, eles contêm um resumo e palavras chave disponíveis em inglês, então as palavras-chave utilizadas foram os termos em inglês “hull number”, “convexity”, “paths of order three” e seu sinônimo “p3”, juntamente com a nomenclatura de “irreversible conversion” e a palavra-chave “social network”, organizados na seguinte *string* de busca:

- (“p3” OR “paths of order three”) AND “hull number” AND convexity) OR (“irreversible conversion” AND graph AND “social network”).

#### 3.2.1 Estratégia de Busca e Seleção de Dados

Como estratégia para o empreendimento da busca são construídas *strings* com as palavras-chave e seus sinônimos. As *strings* são submetidas às máquinas de busca. Após a leitura dos títulos, resumos e aplicação dos critérios de inclusão, exclusão e de avaliação de qualidade, o trabalho é selecionado se confirmada a sua relevância pelo principal revisor. Se houver dúvida da relevância, os demais revisores são consultados.

Após definidos os trabalhos definitivamente incluídos, estes são lidos na íntegra. O revisor faz um resumo de cada um deles, com o auxílio de um formulário de extração de dados. Este formulário contém os seguintes campos: Ano de Publicação, Título, Autores, Fonte, Aplicações e Observações, sendo este último, o campo designado para conter os resultados do número envoltório  $P_3$  determinados no artigo sendo resumido.

#### 3.2.2 Definição da Síntese dos Dados Extraídos

Com os formulários de extração de dados preenchidos, é realizada uma síntese dos dados extraídos, destacando as aplicações relacionadas ao número envoltório na convexidade  $P_3$  os resultados deste mesmo parâmetro determinados no trabalho. As aplicações são categorizadas por cenários que são descritos e os resultados são categorizados de acordo com a classe de grafo a que pertencem.

#### 3.2.3 Critérios de Inclusão e Exclusão

Para que a busca seja eficaz em responder as questões de pesquisa, são utilizados como critérios de inclusão “Trabalhos que tratam do número envoltório  $P_3$  ou conversão irreversível” e “Trabalhos que estejam acessíveis gratuitamente”, e como critérios de exclusão “Trabalhos que não tratam de convexidade ou conversão irreversível”, “Trabalhos que tratam de outras convexidades ou de outros parâmetros”, “Trabalhos que ainda se encontram em processo de publicação” e “Trabalhos que não estejam redigidos em inglês ou português”.

#### 3.2.4 Critérios de Avaliação da Qualidade

A fim de avaliar a qualidade dos estudos encontrados após a realização da busca, foram utilizados os seguintes critérios de qualidade:

- Relevância. O trabalho responde à questão de pesquisa definida no protocolo da revisão?
- Rigor. Os resultados obtidos pelo(s) autor(es) são claramente definidos?
- Credibilidade. O trabalho já passou pelas etapas do processo de publicação?

### 3.3 Condução

A princípio, foi realizada uma busca para identificar a existência de revisões sistemáticas e *surveys* envolvendo o número envoltório na convexidade  $P_3$ , entretanto nenhuma revisão sistemática e nenhum *survey* sobre o assunto foram encontrados. Sendo assim, foi possível iniciar o processo de busca dos dados explicitado no protocolo de revisão. A *string* de busca foi aplicada nas quatro bases definidas, à procura das palavras-chave em qualquer parte do trabalho. Foram encontrados 261 trabalhos dentre os quais, 84 deles eram duplicados. Os 177 trabalhos restantes foram utilizados para iniciar o processo de exclusão.

O primeiro passo foi a exclusão dos estudos com base nos títulos e nos resumos examinando a sua relevância para esta revisão. Quando os títulos e resumos não fornecessem informações suficientes ou houvesse alguma dificuldade em decisão para exclusão, a introdução e/ou a conclusão seriam consultadas. Este estágio apontou 114 trabalhos para exclusão, remanescendo um total de 63 estudos selecionados para a etapa de avaliação da qualidade dos mesmos.

Após serem aplicados os critérios de avaliação de qualidade, remanesceram 53 estudos a serem lidos na íntegra, para a extração dos dados. Cada trabalho selecionado foi analisado. A síntese dos resultados é mostrada na seção seguinte.

## 4. RESULTADOS

Nesta seção se encontra a síntese e as categorizações dos 53 estudos selecionados. Dentre estes estudos, foram encontrados tanto artigos, dissertações de mestrado e teses de doutorado. Apesar do protocolo de busca não ter restringido o intervalo de tempo, os estudos selecionados são recentes, todos se encontram em um intervalo de publicação entre os anos de 2008 e 2019.

Embora existam abordagens particulares de cada aplicação e nomenclaturas diferentes, se encontram na Tabela 1 as categorizações dos cenários de aplicação do número envoltório  $P_3$  e também de problemas relacionados. Os resultados se encontram na Tabela 2, categorizados por classe de grafo a que pertencem.

**Tabela 1. Categorização de Estudos Selecionados por Aplicações.**

Cenário	Referências
Automata Celular	[17, 36, 62, 64]
Contaminação	[1, 2, 11, 12, 16, 18, 27, 38, 46, 48, 51, 52, 54, 55, 58, 57, 63, 65, 66]
Divulgação de Opinião e Política	[1, 18, 26, 33, 31, 38, 46, 48, 51, 55, 57, 60, 63, 66]
Estratégias de Marketing e Publicidade	[2, 3, 11, 17, 16, 19, 25, 24, 30, 33, 31, 22, 36, 38, 46, 48, 51, 52, 54, 55, 57, 64, 62, 66]
Física Estatística	[18, 19]
Percolação	[13, 17, 20, 21, 36, 52, 55, 62, 66]
Redes de Computadores e Computação Distribuída	[1, 2, 11, 17, 20, 21, 23, 27, 36, 48, 55, 60, 64]
Redes de Expressão Gênica	[17, 62, 64]
Redes Sociais e Influência Social	[3, 12, 13, 17, 19, 22, 26, 30, 31, 27, 36, 39, 48, 51, 52, 55, 57, 64, 66]
Redes Neurais	[17, 36]
Sistemas Imunes	[17, 62, 64]

**Tabela 2. Resultados do Número Envoltório  $P_3$ .**

Classe de Grafos	Número Envoltório $P_3$	Referências
Caminhos $P_n$	$h_{P_3}(P_n) = \lceil (n+1)/2 \rceil$ .	[16, 38]
Ciclos $C_n$	$h_{P_3}(C_n) = \lceil n/2 \rceil$ .	[16, 38]
Completos $K_n$	$h_{P_3}(K_n) = 2$ .	[16, 38]
Grades $G_{m \times n}$	$h_{P_3}(G) = \lceil (m+n)/2 \rceil$ .	[14]
Produto Forte $G \boxtimes H$	$h_{P_3}(G \boxtimes H) = 2$ .	[27, 57]
Produto Lexicográfico $G \circ H$	$h_{P_3}(G \circ H) = 2$ .	[27, 57]
Grafo $r$ -regular $G$	$h_{P_3}(G) \geq \left(1 - \frac{r}{4}\right)  V(G) $ .	[38]
Grafo fortemente regular $G(n, k, b, c)$	$h_{P_3}(G) \leq \lceil \log_{c+1}(kc + 1) \rceil + 1$	[65]
Torneios Multipartidos Livres de Clone $T$	$h_{P_3}(T) \leq \left\lfloor \frac{ V(T) }{2} \right\rfloor + 1$ .	[59]

Árvores	Pode ser determinado em tempo linear.	[16, 38]
Cografos	Pode ser determinado em tempo linear.	[15, 16, 64]
Complemento de Árvores	Pode ser determinado em tempo linear.	[48]
Cografos-árvore	Pode ser determinado em tempo linear.	[48]
Prismas Complementares	Pode ser determinado em tempo linear.	[39, 40]
Grafos $P_4$ -reduzíveis	Pode ser determinado em tempo linear.	[48]
Grafos de $treewidth$ limitado	Pode ser determinado em tempo linear.	[48]
$(q, q-4)$ -grafos	Pode ser determinado em tempo linear, com $q$ fixo.	[15]
Grafos $P_4$ -esparcos	Pode ser determinado em tempo linear.	[15]
Cordais	Pode ser determinado em tempo polinomial.	[16, 17, 36, 64]
Grafos de $rankwidth$ limitado	Pode ser determinado em tempo polinomial.	[48]
Grafos de Permutação	Pode ser determinado em tempo polinomial.	[48]
Grafos Cúbicos	Pode ser determinado em tempo polinomial.	[60]
Grafos Gerais	NP-completo.	[16, 17, 36]
Bipartidos	NP-completo.	[6, 7, 64]
Planares de grau máximo 3 ou 4	NP-completo.	[61, 60]
Subgrafos de Grades	NP-completo.	[5]
Produtos Cartesianos	NP-completo.	[27, 57, 58]
Grafos bipartidos com grau máximo 4	APX-difícil.	[28]
Grafos livres de $K_3$ com grau máximo 6	W[1]-difícil, parametrizado pelo tamanho da solução.	[55]

#### 4.1 Qual o alcance e limitações das aplicações existentes sobre o número envoltório na convexidade $P_3$ ?

Analisando os estudos selecionados através da revisão sistemática, como apresentado na Tabela 1, observa-se que a maioria destes descrevem aplicações dos conceitos de número envoltório na convexidade  $P_3$  ou de conversão irreversível, um tópico que não considera convexidade, mas possui problemas relacionados ao parâmetro número envoltório, já que um conjunto inicial de

vértices propaga uma informação para os demais vértices de um grafo ou de uma rede.

A partir destes estudos verifica-se que em cenários que hajam espalhamento ou disseminação de alguma informação, os conceitos de convexidade podem ser aplicados. Mais especificamente sobre o número envoltório  $P_3$  verifica-se que este parâmetro pode ser aplicado em contextos nos quais duas entidades disseminam uma informação para uma terceira, quando se precisa saber a quantidade de entidades inicialmente convencidas para maximizar, ou até minimizar a influência.

Porém considerando somente o parâmetro número envoltório na convexidade  $P_3$ , foram encontrados apenas cenários de aplicações fictícias onde este poderia ser aplicado, uma vez que no mundo real, um vértice ser influenciado por apenas dois de seus vizinhos é um modelo bastante restrito que pode não envolver fatores que se se aproximam da realidade, tais como custo de convencimento de cada indivíduo, limite de tempo de disseminação na rede e fatores subjetivos que podem surgir quando se lida com indivíduos. Desta forma, há outros modelos que podem ser utilizados para descrever problemas de influência social de forma a torná-los mais realísticos e que possam se aproximar de aplicações reais, e a partir deles desenvolver algoritmos que possam fornecer soluções para um problema real.

Um destes outros modelos é o *linear threshold influence propagation model*, em que um usuário  $v$  se torna *ativo* quando a soma das influências de seus vizinhos na rede atinge um certo *threshold*  $t(v)$  [50]. Este modelo, juntamente com o problema de se selecionar um subconjunto de vértices em uma rede que permita ativar todos os vértices da rede é estudado no artigo “On finding small sets that influence large networks” [31], no qual, além de descrever cenários fictícios onde os conceitos de propagação poderiam ser aplicados, os autores também realizam experimentos em *data sets* de redes sociais reais como Delicious, Facebook, Flickr, Higgs-twitter, Last.fm, Livemocha, YouTube, dentre outras.

Além do artigo citado no parágrafo anterior, poucos trabalhos dos estudos selecionados apresentaram estudos empíricos sobre o problema de propagação de influência [29, 30, 32]. Sendo assim, uma sugestão seria prosseguir, além dos estudos teóricos, com estudos empíricos para verificar as possibilidades de solução de problemas do mundo real, no sentido de analisar a efetividade e os impactos deste conceito na prática.

Apesar da existência de outros modelos de disseminação de influência social, o estudo do número envoltório na convexidade  $P_3$  ainda possui relevância teórica, já que, por ser um esquema adequado de disseminação de uma informação ou influência entre entidades para problemas em certas classes restritas de grafos, as técnicas e algoritmos desenvolvidos para solucionar problemas relacionados à este parâmetro podem servir de base para pesquisas futuras envolvendo modelos complexos de influência social. Dados os exemplos apresentados, pode-se sugerir ainda, a correlação entre o número envoltório na convexidade  $P_3$  e outros campos da computação não explorados e também em outros contextos de áreas biológicas, humanas e sociais.

## 4.2 Quais as lacunas concernentes aos resultados teóricos existentes sobre o número envoltório na convexidade $P_3$ ?

A partir da Tabela 2 observa-se a existência de resultados algorítmicos e de complexidade sobre o parâmetro abordado. Centeno [16] mostra que, dado um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ , decidir

se o número envoltório  $P_3$  de  $G$  é menor ou igual a  $k$  é um problema NP-completo para a classe de grafos gerais. Este mesmo problema também é NP-completo quando  $G$  é um grafo bipartido [7, 64], quando  $G$  é um grafo planar [60], quando  $G$  é um grafo resultado de um produto Cartesiano [27] e quando  $G$  é subgrafo de uma grade [5]. Ainda neste contexto, Coelho et al. [28] mostram que o problema é APX-difícil e Marcilon [55] mostra que considerando o problema na versão parametrizada no tamanho da solução  $k$ , o mesmo pertence à classe W[1]-difícil.

Sendo assim, a partir dos resultados de complexidade computacional acima descritos, determinar o parâmetro número envoltório  $P_3$  de um grafo qualquer pode não ser computacionalmente simples. Nesse aspecto, vários autores procuraram determinar igualdades, limites superiores e algoritmos de tempo polinomial para algumas classes particulares de grafos. Então, através dos dados explicitados, é detectada uma lacuna na literatura. Desta forma, há a necessidade de estudos em busca de classes de grafos mais restritas a fim de encontrar mais soluções algorítmicas de tempo polinomial para classes de grafos não citadas na Tabela 2.

## 5. CONCLUSÕES

Este estudo apresentou uma revisão sistemática sobre o número envoltório na convexidade  $P_3$  em grafos, com o enfoque de evidenciar o alcance e limitações das aplicações existentes sobre este parâmetro e também para mostrar as classes de grafos que possuem o número envoltório  $P_3$  determinado.

Os resultados mostraram que, se tratando somente do número envoltório na convexidade  $P_3$ , este parâmetro possui poucas, ou quase nenhuma, aplicação prática em contextos reais. Contudo, verificando algoritmos de conversão irreversível, correlatos aos algoritmos do parâmetro número envoltório  $P_3$  foram encontrados vários estudos empíricos que envolvem aplicações práticas de tais algoritmos.

Mesmo possuindo apenas aplicações práticas hipotéticas, os resultados mostraram que o número envoltório  $P_3$  possui relevância teórica, visto que, por seu problema de decisão ser um problema NP-completo, vários autores despenderam esforços para encontrar algoritmos de tempo polinomial para classes de grafos restritas, nas quais as técnicas e algoritmos empregados poderão servir de fundamentos para desenvolver modelos que envolvam aplicações práticas reais.

## 6. REFERÊNCIAS

- [1] Adams, S., Brass, Z., Stokes, C., and Troxell, D. 2013. Irreversible  $k$ -threshold and majority conversion processes on complete multipartite graphs and graph products. *Australasian Journal of Combinatorics* 56 (2013), 47–60.
- [2] Adams, S. S., Booth, P., Troxell, D. S., and Zinnen, S. L. 2012. Modeling the spread of fault in majority-based network systems: Dynamic monopolies in triangular grids. *Discrete Applied Mathematics*, 160, 10 (2012), 1624–1633.
- [3] Adams, S. S., Troxell, D. S., and Zinnen, S. L. 2011. Dynamic monopolies and feedback vertex sets in hexagonal grids. *Computers & Mathematics with Applications*, 62, 11 (2011), 4049–4057.
- [4] Allouche, J.-P., Courbage, M., and Skordev, G. 2001. *Notes on cellular automata*, volume 3 (2001). Cubo Mat. Educ.
- [5] Araújo, R. T., Sampaio, R. M., dos Santos, V. F., and Szwarcfiter, J. L. 2018. The convexity of induced paths of

- order three and applications: Complexity aspects. *Discrete Applied Mathematics* 237 (2018), 33 – 42.
- [6] Araújo, R. T., Sampaio, R. M., and Szwarcfiter, J. L. 2013. The convexity of induced paths of order three. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 44 (2013), 109–114.
- [7] Araújo, R. T. d. 2014. Convexidades de caminhos e convexidades geométricas. Master's thesis, Universidade Federal do Ceará.
- [8] Axelrod, R. M. 1997. *The complexity of cooperation: Agent-based models of competition and collaboration*. Princeton University Press.
- [9] Balister, P., Bollobás, B., Johnson, J. R., and Walters, M. 2010. Random majority percolation. *Random Structures & Algorithms*, 36, 3 (2010), 315–340.
- [10] Balogh, J. and Pete, G. 1998. Random disease on the square grid. *Random Structures and Algorithms*, 13, 3-4 (1998), 409–422.
- [11] Bazgan, C. and Chopin, M. 2014. The complexity of finding harmless individuals in social networks. *Discrete Optimization*, 14 (2014), 170–182.
- [12] Blaum, M. and Marengo, J. 2019. Computing the  $P_3$ -hull number of a graph, a polyhedral approach. *Discrete Applied Mathematics*, 255 (2019), 155 – 166.
- [13] Boccaletti, S., Almendral, J., Guan, S., Leyva, I., Liu, Z., Sendiña-Nadal, I., Wang, Z., and Zou, Y. 2016. Explosive transitions in complex networks' structure and dynamics: Percolation and synchronization. *Physics Reports*, 660 (2016), 1–94.
- [14] Bollobás, B. 2006. *The art of mathematics: Coffee time in Memphis*. Cambridge University Press.
- [15] Campos, V., Sampaio, R. M., Silva, A., and Szwarcfiter, J. L. 2015. Graphs with few  $P_4$ 's under the convexity of paths of order three. *Discrete Applied Mathematics*, 192 (2015), 28–39.
- [16] Centeno, C. C. 2012. *A Convexidade  $P_3$  para Grafos não Direcionados*. PhD thesis, UFRJ/COPPE.
- [17] Centeno, C. C., Dourado, M. C., Penso, L. D., Rautenbach, D., and Szwarcfiter, J. L. 2011. Irreversible conversion of graphs. *Theoretical Computer Science*, 412, 29 (2011), 3693–3700.
- [18] Centeno, C. C., Penso, L. D., Rautenbach, D., and de Sá, V. G. P. 2012. Immediate versus eventual conversion: comparing geodetic and hull numbers in  $P_3$ -convexity. In *International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, (2012), Springer, pp. 262–273.
- [19] Centeno, C. C., Penso, L. D., Rautenbach, D., and de Sá, V. G. P. 2013. Geodetic number versus hull number in  $P_3$ -convexity. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 27, 2 (2013), 717–731.
- [20] Chang, C.-L. and Lyuu, Y.-D. 2011. Stable sets of threshold-based cascades on the erdős-rényi random graphs. In *International Workshop on Combinatorial Algorithms* (2011), Springer, pp 96–105.
- [21] Chang, C.-L. and Lyuu, Y.-D. 2013. Bounding the sizes of dynamic monopolies and convergent sets for threshold-based cascades. *Theoretical Computer Science*, 468 (2013), 37– 49.
- [22] Chiang, C.-Y., Huang, L.-H., and Yeh, H.-G. 2013. Target set selection problem for honeycomb networks. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 27, 1 (2013), 310–328.
- [23] Chopin, M., Nichterlein, A., Niedermeier, R., and Weller, M. 2014. Constant thresholds can make target set selection tractable. *Theory of Computing Systems*, 55, 1 (2014), 61–83.
- [24] Cicalese, F., Cordasco, G., Gargano, L., Milanič, M., Peters, J., and Vaccaro, U. 2015. Spread of influence in weighted networks under time and budget constraints. *Theoretical Computer Science*, 586 (2015), 40–58.
- [25] Cicalese, F., Cordasco, G., Gargano, L., Milanič, M., Peters, J. G., and Vaccaro, U. 2014. *How to go Viral: Cheaply and Quickly*, Springer International Publishing, Cham, pp. 100–112.
- [26] Cicalese, F., Cordasco, G., Gargano, L., Milanič, M., and Vaccaro, U. 2014. Latency-bounded target set selection in social networks. *Theoretical Computer Science*, 535 (2014), 1– 15.
- [27] Coelho, E. M., Coelho, H., Nascimento, J. R., and Szwarcfiter, J. L. 2019. On the  $P_3$ -hull number of some products of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 253 (2019), 2 – 13.
- [28] Coelho, E. M. M., Dourado, M. C., and Sampaio, R. M. 2015. Inapproximability results for graph convexity parameters. *Theoretical Computer Science*, 600 (2015), 49 – 58.
- [29] Cordasco, G., Gargano, L., Mecchia, M., Rescigno, A. A., and Vaccaro, U. 2015. *A Fast and Effective Heuristic for Discovering Small Target Sets in Social Networks*, Springer International Publishing, Cham, pp. 193–208.
- [30] Cordasco, G., Gargano, L., and Rescigno, A. A. 2015. Influence propagation over large scale social networks. In *Proceedings of the 2015 IEEE/ACM International Conference on Advances in Social Networks Analysis and Mining 2015* (2015), ACM, pp. 1531–1538.
- [31] Cordasco, G., Gargano, L., and Rescigno, A. A. 2016. On finding small sets that influence large networks. *Social Network Analysis and Mining*, 6, 1 (2016), 94.
- [32] Cordasco, G., Gargano, L., Rescigno, A. A., and Vaccaro, U. 2014. Optimizing spread of influence in social networks via partial incentives. In *International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity* (2014), Springer, pp. 119–134.
- [33] Cordasco, G., Gargano, L., Rescigno, A. A., and Vaccaro, U. 2016. *Evangelism in Social Networks*. Springer International Publishing, Cham, (2016), pp. 96–108.
- [34] Domingos, P. and Richardson, M. 2001. Mining the network value of customers. In *Proceedings of the seventh ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*, (2011), ACM, pp. 57–66.
- [35] Dourado, M. C., Gimbel, J. G., Kratochvíl, J., Protti, F., and Szwarcfiter, J. L. 2009. On the computation of the hull number of a graph. *Discrete Mathematics*, 309, 18 (2009), 5668– 5674.
- [36] Dourado, M. C., Penso, L. D., Rautenbach, D., and Szwarcfiter, J. L. 2010. Brief announcement: on reversible and irreversible conversions. In *International Symposium on Distributed Computing* (2010), Springer, pp. 395–397.

- [37] Dourado, M. C., Protti, F., and Szwarcfiter, J. L. 2010. Complexity results related to monophonic convexity. *Discrete Applied Mathematics*, 158, 12 (2010), 1268–1274.
- [38] Dreyer, P. A. and Roberts, F. S. 2009. Irreversible  $k$ -threshold processes: Graph-theoretical threshold models of the spread of disease and of opinion. *Discrete Applied Mathematics*, 157, 7 (2009), 1615–1627.
- [39] Duarte, M. A. 2015. *Sobre convexidade em prismas complementares*. PhD thesis, Universidade Federal de Goiás.
- [40] Duarte, M. A., Penso, L., Rautenbach, D., and dos Santos Souza, U. 2015. Complexity properties of complementary prisms. *Journal of Combinatorial Optimization* (2015), pp. 1–8.
- [41] Duchet, P. 1988. Convex sets in graphs, II. minimal path convexity. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 44, 3 (1988), 307–316.
- [42] Epstein, J. M. 2006. *Generative social science: Studies in agent-based computational modeling*. Princeton University Press.
- [43] Epstein, J. M. and Axtell, R. 1996. *Growing artificial societies: social science from the bottom up*. Brookings Institution Press.
- [44] Everett, M. G. and Seidman, S. B. 1985. The hull number of a graph. *Discrete Mathematics*, 57, 3 (1985), 217–223.
- [45] Flocchini, P., Lodi, E., Luccio, F., Pagli, L., and Santoro, N. 2004. Dynamic monopolies in tori. *Discrete applied mathematics*, 137, 2 (2004), 197–212.
- [46] Gargano, L., Hell, P., Peters, J. G., and Vaccaro, U. 2015. Influence diffusion in social networks under time window constraints. *Theoretical Computer Science*, 584 (2015), 53–66.
- [47] Hassin, Y. and Peleg, D. 2001. Distributed probabilistic polling and applications to proportionate agreement. *Information and Computation*, 171, 2 (2001), 248–268.
- [48] Hon, W.-K., Kloks, T., and Liu, H.-H. 2016. On the  $P_3$ -convexity of some classes of graphs with few  $P_4$ 's and permutation graphs. In *Proceedings of the Australasian Computer Science Week Multiconference* (New York, NY, USA, 2016), ACSW '16, ACM, pp 24:1–24:8.
- [49] Huang, S. 1999. Gene expression profiling, genetic networks, and cellular states: an integrating concept for tumorigenesis and drug discovery. *Journal of Molecular Medicine* 77, 6 (1999), 469–480.
- [50] Kempe, D., Kleinberg, J., and Tardos, É. 2015. Maximizing the spread of influence through a social network. *Theory of Computing* 11, 4 (2015), 105–147.
- [51] Khoshkhan, K., Soltani, H., and Zaker, M. 2012. On dynamic monopolies of graphs: The average and strict majority thresholds. *Discrete Optimization* 9, 2 (2012), 77–83.
- [52] Khoshkhan, K., Soltani, H., and Zaker, M. 2014. Dynamic monopolies in directed graphs: The spread of unilateral influence in social networks. *Discrete Applied Mathematics* 171 (2014), 81 – 89.
- [53] Kitchenham, B. and Charters, S. 2007. Guidelines for performing systematic literature reviews in software engineering. Technical report, Keele University and University of Durham.
- [54] Ludlow, P. and Heydari, B. 2014. The scalpel or the shotgun? a study of strategies for boosting new technology adoption in social network environments. *Procedia Computer Science* 36 (2014), 145–151.
- [55] Marçilon, T. B. 2017. *Resultados no tempo máximo e no número de envoltória nas convexidades  $P_3$  e geodésica*. PhD thesis, Universidade Federal do Ceará.
- [56] Mustafa, N. H. and Pekec, A. 2004. Listen to your neighbors: How (not) to reach a consensus. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 17, 4 (2004), 634–660.
- [57] Nascimento, J. R. 2016. O Número Envoltório  $P_3$  e o Número Envoltório Geodético em Produtos de Grafos. Master's thesis, Universidade Federal de Goiás.
- [58] Nascimento, J. R., Coelho, E. M. M., Coelho, H., and Szwarcfiter, J. L. 2016. On the complexity of the  $P_3$ -hull number of the cartesian product of graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 55 (2016), 169–172.
- [59] Parker, D. B., Westhoff, R. F., and Wolf, M. J. 2008. On two-path convexity in multipartite tournaments. *European Journal of Combinatorics* 29, 3 (2008), 641–651.
- [60] Penso, L. D., Protti, F., Rautenbach, D., and dos Santos Souza, U. 2015. Complexity analysis of  $P_3$ -convexity problems on bounded-degree and planar graphs. *Theoretical Computer Science* 607 (2015), 83–95.
- [61] Penso, L. D., Protti, F., Rautenbach, D., and Souza, U. S. 2014. On  $P_3$ -Convexity of graphs with bounded degree. In *International Conference on Algorithmic Applications in Management* (2014), Springer, pp. 263–274.
- [62] Rautenbach, D., dos Santos, V. F., and Schäfer, P. M. 2014. Irreversible conversion processes with deadlines. *Journal of Discrete Algorithms* 26 (2014), 69–76.
- [63] Roberts, F. S. 2008. Computer science and decision theory. *Annals of Operations Research* 163, 1 (2008), 209.
- [64] Santos, V. F. d. 2013. *Convexidades em Grafos: Intermediações, Parâmetros e Conversões*. PhD thesis, UFRJ/COPPE.
- [65] Silva, B. R. d. et al. 2018. Algoritmos e limites para os números envoltório e de caratêodory na convexidade  $P_3$ . Master's thesis, Universidade Federal de Goiás.
- [66] Soltani, H. and Zaker, M. 2014. On dynamic monopolies of graphs with probabilistic thresholds. *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 90, 03 (2014), 363–375.
- [67] Squazzoni, F. 2012. *Agent-based computational sociology*. John Wiley & Sons.
- [68] van de Vel, M. L. 1993. *Theory of convex structures*, vol. 50, Elsevier.
- [69] Zamboni, A., Hernandez, E., Thomazzo, A. D., Belgamo, A., and Fabbri, S. 2016. *StArt, State of the Art through Systematic Review, Version 3.0*. LaPES, UFSCar.